

## 7 Equazioni di evoluzione e sistemi meccanici

I sistemi dinamici che abbiamo già introdotto nel secondo capitolo sono caratterizzati da una evoluzione continua nel tempo cui corrisponde una traiettoria continua  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  nello spazio delle fasi  $\mathbb{R}^d$ . Per ogni assegnata condizione iniziale  $\mathbf{x}_0$  la traiettoria è soluzione di una equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{x}(t)) \quad (1)$$

dove  $\Phi$  è il campo vettoriale, ossia una applicazione da  $\mathbb{R}^d$  in  $\mathbb{R}^d$ , che contiene tutte le informazioni sul meccanismo che determina la evoluzione del sistema. Una equazione differenziale del primo ordine per un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , corrisponde ad un sistema di equazioni differenziali per le sue componenti. Non esamineremo equazioni differenziali di ordine superiore al primo perché queste possono essere sempre ricondotte ad equazioni del primo ordine. La soluzione della equazione (1) si scrive

$$\mathbf{x}(t) = S_t(\mathbf{x}_0)$$

dove il flusso  $S_t$  ha la proprietà di gruppo. Nel caso in cui il campo dipenda anche dal tempo  $\Phi = \Phi(t, \mathbf{x})$ , tale dipendenza può essere eliminata aumentando di uno la dimensione dello spazio della fasi. A tal fine si aggiunge una nuova coordinata  $x_0$  ed una componente al campo  $\Phi_0 = 1$  sicché la nuova equazione diventa  $\dot{x}_0 = 1$  mentre le rimanenti si scrivono  $\dot{x}_k = \Phi_k(x_0, \mathbf{x})$ .

Mentre la dipendenza esplicita dal tempo aumenta di uno la dimensione del problema, una riduzione della dimensione è consentita dalla presenza di un integrale primo  $H(\mathbf{x})$  che si verifica quando esiste una funzione il cui gradiente è ortogonale a  $\Phi$  ossia  $\text{grad } H \cdot \Phi = 0$ . In tal caso ogni orbita che ha inizio sulla superficie  $H(\mathbf{x}) = E$  si mantiene su di essa.

### Esempi

La proprietà di gruppo si verifica nei sistemi lineari  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  perché la soluzione si scrive  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ . Nei sistemi non lineari la verifica è immediata nel caso unidimensionale perché la soluzione si ottiene per separazione delle variabili. Dato  $\dot{x} = x^2$  la soluzione è  $x = S_t(x_0) = x_0/(1 - x_0 t)$ . Quindi detto  $x_1 = S_{t_1}(x_0)$  e  $x_2 = S_{t_2-t_1}(x_1)$  verifichiamo subito che  $S_{t_2-t_1}(x_1) = S_{t_2-t_1}(S_{t_1}(x_0)) = S_{t_2}(x_0)$ .

Come esempio di integrale primo consideriamo le equazioni di Newton per una particella non relativistica in un campo conservativo ove la forza è data da  $\mathbf{F} = -\partial V/\partial \mathbf{r}$ . Detti  $\mathbf{r}$  il vettore posizione e  $\mathbf{p}$  la quantità di moto le equazioni del moto

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

possono essere riscritta nella forma (1) introducendo il vettore  $\mathbf{x}$  nello spazio delle fasi ed il corrispondente campo vettoriale

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{p}/m \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}$$

In questo si verifica immediatamente che l'integrale primo è corrisponde a

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

e che il valore costante  $H(\mathbf{x}) = E$  che assume lungo ogni traiettoria è la sua energia.

Un secondo esempio è fornito moto di un corpo rigido con un punto fisso il cui campo di velocità è  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  dove supponiamo che il vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  sia costante.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

In questo caso il vettore nello spazio delle fasi è il vettore posizione  $\mathbf{r}$  ed il campo vettoriale è il campo di velocità  $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  e si hanno due integrali primi indipendenti  $H$  e  $G$  dove  $\partial H / \partial \mathbf{r} = \mathbf{r}$  e  $\partial G / \partial \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}$ . Ne segue che

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \qquad G = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

La superficie  $H = c_1$  è una sfera mentre  $G = c_2$  è un piano ortogonale a  $\boldsymbol{\omega}$ . Quindi la intersezione di queste due varietà bidimensionali è una varietà di dimensione 1 costituita da una cerchio che sta un piano ortogonale alla retta passante per l'origine diretta come  $\boldsymbol{\omega}$  ed il cui centro è nella intersezione di questa retta con piano. Queste sono appunto le traiettorie dei punti del corpo rigido.

### *Buona posizione*

Concludiamo queste considerazioni generali ricordando che la condizione perchè la soluzione di una equazione differenziale esista e sia unica è il campo soddisfi una condizione di Lipschitz  $\|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  (teorema di Picard-Lindelof). Se scriviamo la equazione in forma integrale e ci limitiamo ad un intervallo  $[0, T]$

$$\mathbf{x}(t) = M(\mathbf{x}(t)) \equiv \mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}(t')) dt' \qquad 0 \leq t \leq T$$

possiamo considerare la soluzione  $\mathbf{x}(t)$  come il punto fisso della mappa  $M$ . Nello spazio delle traiettorie  $\mathbf{x}(t)$  con punto iniziale  $\mathbf{x}_0$  scegliamo la norma

$$\|\mathbf{x}\|_T = \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{x}(t)\|$$

La esistenza di questo punto fisso è garantita se la mappa è contrattiva. Osserviamo quindi che

$$\begin{aligned} \|M(\mathbf{y}) - M(\mathbf{x})\|_T &\equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|M(\mathbf{y}(t)) - M(\mathbf{x}(t))\| = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y}(t')) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}(t'))) dt' \right\| \leq \\ &\leq T \max_{0 \leq t \leq T} \|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y}(t)) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}(t))\| \leq LT \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = LT \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_T \end{aligned}$$

Se  $LT < 1$  si ha una contrazione ed esiste un unico punto fisso cui converge la successione  $\mathbf{x}_n(t) = M(\mathbf{x}_{n-1}(t))$  inizializzata da  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0$ . La condizione di Lipshitz è verificata se  $\Phi \in C^1$ . Un semplice controesempio è dato da  $\dot{x} = x^{1/2}$  la cui soluzione per  $x_0 = 0$  è  $x(t) = 0$  mentre se  $x_0 \neq 0$  si ha  $x(t) = (x_0^{1/2} + t/2)^2$ . Se in quest'ultima prendiamo il limite  $x_0 \rightarrow 0$  troviamo  $x(t) = t^2/4$  che soddisfa ancora la equazione e che costituisce una seconda soluzione con  $x(0) = x_0$  accanto a quella nulla.

### Equilibrio e stabilità

Nel capitolo 2 abbiamo definito i punti di equilibrio  $\mathbf{x}_c$  come quelli in cui il campo  $\Phi$  si annulla ed abbiamo introdotto la nozione di stabilità. Un punto stabile si dice attrattivo o asintoticamente stabile se  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_c$  quando  $t \rightarrow +\infty$  per ogni condizione iniziale  $\mathbf{x}_0$  sufficientemente vicina ad  $\mathbf{x}_c$ . Se  $\mathbf{x}_c$  è stabile ed attrattivo per il sistema linearizzato lo è anche per il sistema assegnato.

Nei sistemi unidimensionali un punto di equilibrio  $x_c$  è stabile ed attrattivo se  $\Phi(x_c) = 0$  e  $\Phi'(x_c) < 0$ . Il risultato è immediato da provare introducendo una funzione  $V(x)$  tale che  $\Phi(x) = -V'(x)$  che ha un minimo nel punto  $x_c$ . La funzione  $V(x(t))$  calcolata lungo ogni orbita con punto iniziale abbastanza vicino a  $x_c$  è monotona decrescente

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = V'(x(t)) \dot{x}(t) = -\Phi^2(x(t))$$

e quindi l'orbita per  $t \rightarrow +\infty$  ha  $x_c$  come punto limite.

Nel caso multidimensionale la stabilità non lineare è assicurata se esiste una funzione  $H(\mathbf{x})$  detta funzione di Lyapunov con un minimo in  $\mathbf{x}_c$  e che risulti monotona non crescente lungo ogni traiettoria con punto iniziale vicino a  $\mathbf{x}_c$ , condizione assicurata da

$$\text{grad } H \cdot \Phi \leq 0$$

Se  $H(\mathbf{x}(t))$  è monotona decrescente il punto di equilibrio è attrattivo (asintoticamente stabile). Un esempio è dato da un sistema meccanico con forze conservative aventi potenziale  $V(\mathbf{r})$  ed una forza dissipativa. In questo caso se  $H = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$  e se  $V(\mathbf{r})$  ha un minimo per  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c$  risulta che  $H$  ha un minimo per  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c$ ,  $\mathbf{p} = 0$  e che è monotona decrescente lungo ogni orbita. Se infatti supponiamo che la forza dissipativa sia  $-\beta\mathbf{p}$  con  $\beta > 0$  le equazioni del moto sono

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}}\mathbf{r} - \beta\mathbf{p}$$

e la derivata temporale di  $H$  è data da

$$\frac{dH}{dt} = -\beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} < 0$$

Se la forza dissipativa è assente  $H$  è una costante del moto. In questo caso il punto di equilibrio è ancora stabile ma non attrattivo. In compenso la condizione di stabilità è verificata anche per  $t < 0$ .

Notiamo che per un punto che si muove lungo l'asse  $x$  soggetto ad un potenziale e ad una forza dissipativa l'approssimazione di forte dissipazione conduce alla equazione unidimensionale  $\dot{x} = \Phi(x) \equiv -V'(x)(m\beta)^{-1}$ .

## Spazio delle fasi bidimensionale

Le equazioni di evoluzione nel piano delle fasi, in cui  $(x, y)$  sono le coordinate rispetto ad un riferimento cartesiano, sono date da

$$\frac{dx}{dt} = \Phi_x(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = \Phi_y(x, y)$$

dove assumiamo che le componenti del campo  $\Phi$  abbiano derivate prime continue. Il problema si risolve analiticamente se si trova un integrale primo del moto  $H(x, y)$ . La condizione cui  $H$  deve soddisfare è che il suo gradiente sia ortogonale a  $\Phi$ . Questo ci consente di scrivere

$$\text{grad } H \equiv \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = c(x, y) \begin{pmatrix} -\Phi_y \\ \Phi_x \end{pmatrix}$$

dove  $c(x, y)$  è una funzione non nulla nel dominio in cui  $H$  risulta definito. La funzione è determinata dalla condizione che

$$dH = -c\Phi_y dx + c\Phi_x dy$$

sia una forma chiusa ed un differenziale esatto se  $c\Phi_x$ ,  $c\Phi_y$  non hanno singolarità. Tale condizione è data da

$$-\frac{\partial}{\partial y}(c\Phi_y) = \frac{\partial}{\partial x}(c\Phi_x)$$

che si può riscrivere nella forma

$$\text{div}(c\Phi) = 0$$

Se il campo  $\Phi$  ha divergenza nulla, la funzione  $c$  diventa semplicemente una costante che può essere scelta uguale ad 1. Tramite la funzione  $H$  il campo  $\Phi$  si scrive nella forma seguente

$$\Phi = \frac{1}{c(x, y)} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix}$$

In generale determinare la funzione  $c(x, y)$ , che vien detta fattore integrante è difficile. La determinazione di  $c$  è possibile se il campo è separabile

$$c(x, y) \Phi_y(x, y) = f(x) \quad c(x, y) \Phi_x(x, y) = g(y)$$

vale a dire se  $\Phi_y/\Phi_x$  è esprimibile come il rapporto di una funzione di  $x$  e di una funzione di  $y$ . Ne risulta che

$$dH = -f(x) dx + g(y) dy \quad H(x, y) = F(x) + G(y)$$

dove  $F(x)$  e  $G(y)$  sono le primitive di  $-f(x)$  e  $g(y)$ . Il fattore integrante in questo caso è  $c = g(y)/\Phi_x(x, y) = f(x)/\Phi_y$ . Una volta determinato l'integrale primo, scelta una condizione iniziale  $(x_0, y_0)$  e detto  $H(x_0, y_0) = E$  l'orbita corrispondente è la curva nel piano delle fasi definita da

$$H(x, y) = E$$

La soluzione esplicita nella forma  $y = y(x)$  si può ottenere partendo dal punto iniziale se  $\partial H/\partial y$  è non nulla. Dove  $\partial H/\partial y = 0$  si annulla si ha  $\dot{x} = 0$  e all'istante  $t_1$  in cui questo accade si osserva una inversione nel moto proiettato sull'asse  $x$ . Tutti i punti di inversione ripartiscono l'orbita in archi che separatamente si possono rappresentare nella forma  $y = y(x, E)$ . Se sostituiamo  $y = y(x, E)$  nella prima equazione del moto abbiamo

$$\frac{dx}{dt} = \Phi_x(x, y(x, E))$$

equazione che si risolve per separazione di variabili. La determinazione dei punti critici o di equilibrio in cui  $\Phi$  si annulla e  $H$  è stazionario, e l'analisi della loro stabilità, completano lo studio del problema.

### Sistemi meccanici conservativi

Il caso di maggior rilievo è quello di un sistema meccanico, costituito da un punto materiale di massa  $m$  su cui agisce una forza  $F(x)$ . Le equazioni del moto si scrivono

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \quad \frac{dp}{dt} = F(x)$$

Quindi il vettore nello spazio delle fasi è ed il campo  $\Phi$  sono dati da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} p/m \\ F(x) \end{pmatrix}$$

La divergenza di  $\Phi$  è nulla e l'integrale primo è dato da

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

dove il potenziale  $V(x)$  è definito da  $V'(x) = -F(x)$ .

Fissiamo le condizioni iniziali  $(x_0, p_0)$ , ponendo  $E = H(x_0, p_0)$ , assumiamo che  $p_0 < 0$  e supponiamo che il potenziale sia monotono decrescente fino al primo punto di inversione  $x_1$  dove  $V(x_1) = E$ . Il momento è espresso da

$$p = -\sqrt{2m(E - V(x))}$$

per  $x_1 < x_0$  e il punto si muove nel verso negativo dell'asse  $x$  decelerando poiché  $F(x) = -V'(x) > 0$ . La legge oraria è data da

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{(E - V(x'))}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_x^{x_0} \frac{dx'}{\sqrt{(E - V(x'))}} \equiv \tau(x, x_0) \quad x_1 < x \leq x_0$$

e quindi  $t$  è una funzione monotona decrescente di  $x$ . Distinguiamo due possibili casi  $V'(x_1) < 0$  e  $V'(x_1) = 0$ . Nel primo il punto di inversione non è critico e viene raggiunto in un tempo finito. Nel secondo il punto di inversione è critico, corrisponde ad un massimo del potenziale  $V''(x_c) < 0$  e viene raggiunto solo per  $t \rightarrow \infty$ .

### *Punto di inversione non critico*

Se  $V'(x_1) \neq 0$  il punto  $x_1$  viene raggiunto in un tempo finito  $\tau(x_1, x_0)$ . Supponendo  $x_0$  vicino ad  $x_1$  nell'intervallo  $[x_1, x_0]$  approssimiamo  $V(x)$  tramite lo sviluppo di Taylor al primo ordine  $E - V = -V'(x_1)(x - x_1)$  e ponendo  $-V'(x_1) = mg > 0$  la legge oraria diventa

$$t \simeq \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{x' - x_1}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \left( \sqrt{x_0 - x_1} - \sqrt{x - x_1} \right)$$

Invertendo si ha

$$x \simeq \hat{x}(t) = x_1 + \frac{g}{2}(\hat{t}_1 - t)^2 \quad \hat{t}_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{x_0 - x_1}$$

Il tempo  $t_1 = \tau(x_c, x_0)$  impiegato per raggiungere punto di inversione è approssimato da  $\hat{t}_1$ . Supponendo  $V'(x)$  continuo abbiamo una relazione esatta tramite il resto di Taylor di ordine zero  $E - V = -V'(\xi(x))(x - x_1)$ . In questo caso la continuità assicura che esiste una costante positiva  $g$  tale che  $-V'(\xi(x)) \geq mg$  ed il tempo  $t_1$  impiegato a raggiungere  $x_1$  risulta maggiorato da quello impiegato a raggiungerlo con una decelerazione inferiore ma costante ossia  $t_1 < \hat{t}_1$ .

Dopo che il punto  $x_1$  è raggiunto al tempo  $t_1 = \tau(x_1, x_0)$  il moto si inverte: infatti la velocità si annulla  $\dot{x}(t_1) = 0$  ma l'accelerazione è positiva  $\ddot{x}(t_1) = -V'(x_1)/m > 0$ . Per  $t > t_1$  la soluzione si scrive

$$t = t_1 + \int_{x_1}^x dx' \frac{m}{\sqrt{2m(E - V(x))}} = t_1 + \tau(x_1, x) \quad x \geq x_1 \quad t > t_1$$

e risulta definita fino al successivo punto di inversione. Se non c'è un secondo punto di inversione il moto non si inverte più e l'orbita risulta aperta. Se c'è un secondo punto di inversione non critico  $x_2 > x_1$  dove  $V(x_2) = E$  e  $V'(x_2) > 0$ , questo viene raggiunto ad un tempo finito  $t_2 = t_1 + \tau(x_1, x_2)$ . Il moto si inverte di nuovo e si ripassa per  $x_0$  con lo stesso momento iniziale  $p_0 < 0$  al tempo  $T = 2\tau(x_1, x_2)$ . Infatti

$$T = t_2 + \tau(x_0, x_2) = \tau(x_1, x_0) + \tau(x_1, x_2) + \tau(x_0, x_2) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Il moto risulta periodico con periodo  $T$ . Poichè  $V'(x)$  ha segno opposto in agli estremi di  $[x_1, x_2]$  deve annullarsi almeno in un punto che risulta un suo minimo. Per energie vicine ad un minimo del potenziale le orbite sono chiuse ed il moto è periodico

### *Punto di inversione critico*

Se il punto di inversione è critico  $x_1 = x_c$  dove  $V'(x_c) = 0$  e  $V''(x_c) < 0$ , e quindi coincide con un massimo di  $V(x)$ , il tempo per raggiungerlo diverge. Avendo scelto  $x_1 > x_c$  e  $p_0 < 0$  approssimiamo la legge oraria sviluppando  $V(x)$  in serie di Taylor al secondo ordine rispetto a  $x_c$  e trascurando il resto.

$$V(x) \simeq V(x_c) - \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_c)^2 \quad V''(x_c) = -m\omega^2$$

da cui segue che  $p = -\sqrt{2m(E - V)} = m\omega(x - x_c)$ . La legge oraria è data da

$$t \simeq \frac{1}{\omega} \int_x^{x_0} dx' \frac{1}{x' - x_c} = \frac{1}{\omega} \log \frac{x_0 - x}{x - x_c}$$

e quindi la soluzione esplicita è

$$x \simeq x_c + (x_0 - x_c) e^{-\omega t}$$

Una stima rigorosa si ottiene utilizzando lo sviluppo di Taylor con il resto al primo ordine  $E - V(x) = -\frac{1}{2} V''(\xi(x)) (x - x_c)^2$  e la continuità della derivata seconda. Per  $x \in [x_c, x_0]$  e  $x_0$  sufficientemente prossimo a  $x_c$  possiamo trovare due costanti  $\omega_2 > \omega_1 > 0$  tali che  $m\omega_1^2 \leq -V''(\xi(x)) \leq m\omega_2^2$  e quindi inquadrare la soluzione esatta tra due soluzioni come quella sopra determinata  $x_c + (x_0 - x_c) e^{-\omega_2 t} \leq x(t) \leq x_c + (x_0 - x_c) e^{-\omega_1 t} \leq x(t)$

### *Topologia delle orbite attorno ai punti critici*

Abbiamo finora considerato la legge oraria analizzandone il comportamento in prossimità dei punti di inversione. Per ottenere l'andamento delle orbite nel piano delle fasi si considerano i punti di inversione al variare della energia  $E$  e si determinano i punti critici nello spazio delle fasi definiti da  $(x_c, 0)$  dove  $V'(x_c) = 0$ . Nei punti di minimo si ha  $V''(x_c) > 0$ , nei punti di massimo  $V''(x_c) < 0$ . La funzione  $H(x, p)$  ha un minimo in corrispondenza ad un minimo di  $V(x)$  una sella in corrispondenza ad un punto di massimo di  $V(x)$ . Le orbite ottengono intersecandolo il grafico di  $z = H(x, p)$  con i piani di energia costante  $z = E$  e proiettando le intersezioni nel piano delle fasi  $(x, p)$ . Se usiamo lo sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine possiamo introdurre un cambiamento di coordinate

$$H - V(x_c) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V''(\xi(x)) (x - x_c)^2 = \frac{P^2}{2} \pm \frac{X^2}{2}$$

dove il segno  $\pm$  è quello della derivata seconda di  $V$ , che supponiamo essere continua, e che quindi si mantiene in un intorno di  $x_c$ . La trasformazione

$$P = \frac{p}{\sqrt{m}} \quad X = (x - x_c) \sqrt{\pm V''(\xi(x))}$$

è invertibile e quindi rappresenta quindi un cambio di coordinate. Le orbite sono circonferenze, nel caso in cui  $V$  ha un minimo, iperboli equilateri nel caso di un massimo. La

legge oraria nelle nuove coordinate non si semplifica affatto. Vedremo nel seguito come nel caso di un punto di minimo sia possibile effettuare una trasformazione in coordinate in cui le orbite sono ancora circonferenze e la legge oraria corrisponde ad un moto circolare uniforme.

### Linearizzazione attorno ai punti critici

La approssimazione quadratica del potenziale attorno ai punti critici, ottenuta tramite lo sviluppo di Taylor troncato al secondo ordine, conduce alle equazioni lineari considerate nel capitolo 2. Se il potenziale ha un minimo in  $x_c$  posto  $V''(x_c) = m\omega^2$  l'integrale primo  $H$  è dato da

$$H = V(x_c) + \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - x_c)^2$$

Le orbite  $H = E$  sono ellissi con semiassi  $a$  e  $b$  dati da

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \quad a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2(E - V(x_c))}{m}} \quad b = \sqrt{2m(E - V(x_c))} = m\omega a$$

La legge oraria ottenuta integrando  $dx/dt = p(x, E)/m$  oppure risolvendo le equazioni lineari  $\dot{x} = p/m$  e  $\dot{p} = -m\omega^2(x - x_c)$  è data da

$$\begin{pmatrix} x - x_c \\ p/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_c \\ p_0/m \end{pmatrix}$$

Se il potenziale ha un massimo in  $x_c$  posto  $V''(x_c) = -m\omega^2$  l'espressione per  $H$  è

$$H = V(x_c) + \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2}(x - x_c)^2$$

Le orbite sono una famiglia di iperboli. Se  $E > V(x_c)$  la equazione si scrive

$$\frac{p^2}{b^2} - \frac{(x - x_c)^2}{a^2} = 1 \quad a = \frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{2(E - V(x_c))}}{m} \quad b = m\omega a$$

mentre se  $E < V(x_c)$

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \quad a = \frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{2(V(x_c) - E)}}{m} \quad b = m\omega a$$

La legge oraria si ottiene integrando  $\dot{x} = p(x, E)/m$  oppure risolvendo le equazioni lineari  $\dot{x} = p/m$  e  $\dot{p} = m\omega^2(x - x_c)$  La soluzione in funzione delle condizioni iniziali è data da

$$\begin{pmatrix} x - x_c \\ p/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\omega t) & \omega^{-1} \text{sh}(\omega t) \\ \omega \text{sh}(\omega t) & \text{ch}(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_c \\ p_0/m \end{pmatrix}$$



## Schema di approssimazione

Per ottenere la legge oraria è necessario determinare i punti di inversione e calcolare un integrale che in generale richiede un procedimento numerico. A partire dall'integrale che esprime il tempo di percorrenza  $t$  dal punto iniziale  $(x_0, p_0)$  al punto  $(x, p)$  sull'orbita definita da  $H(x, p) = E$  dove  $E = H(x_0, p_0)$  si può sviluppare uno schema numerico basato su un metodo di quadratura. Il primo passo consiste nel determinare i punti di inversione per un valore fissato dell'energia  $E$ . A tal fine si usa il metodo di Newton iterando la mappa associata alla funzione  $E - V(x)$  di cui vogliamo trovare lo zero e nel quale la mappa ha il suo punto fisso, ossia

$$M(x) = x + \frac{E - V(x)}{V'(x)}$$

Siccome i punti di inversione possono essere più di uno, per la ricerca di uno di questi, diciamo  $x_a$  dobbiamo inizializzare la ricorrenza  $x_{k+1} = M(x_k)$  con un punto  $x_0$  sufficientemente vicino ad  $x_a$  e lontano dai punti critici di  $V(x)$  in modo che cada nel bacino di attrazione di  $x_a$ . Trovati i punti di inversione di esamina se l'orbita con punto iniziale  $(x_0, p_0)$  non incontra alcun punto di inversione, ne incontra uno oppure due.

Le situazioni più semplici sono quelle in cui il potenziale è monotono e quindi si ha uno o nessun punto fisso. Ugualmente semplice è il caso in cui il potenziale ha un solo punto critico in  $x_c$  che è un minimo. Se  $E > V(x_c)$  si hanno due punti di inversione  $x_a < x_c$  e  $x_b > x_c$ . Per trovare  $x_a$  si inizializza con  $x_0$  scegliendolo  $x_0 < x_c$ , per trovare  $x_b$  si inizializza con  $x_0 > x_c$ . Questo è il caso di  $V = x^2/2 + x^4/4$ . Se il potenziale ha un minimo in  $x_c$  ed un massimo in  $x_m$  allora per energia  $E < V(x_m)$  i punti di inversione sono 3. Questo è il caso del potenziale  $V = x^2/2 + x^3/3$  dove  $x_m = -1$  e  $x_c = 0$ . Per  $x_0 \ll x_m$  si converge al primo punto di inversione e per  $x_0 \gg x_c$  al terzo punto di inversione ma in prossimità dei punti critici la struttura dei bacini di attrazione è più complessa e la ricerca del secondo punto di inversione richiede maggiore attenzione.

Esaminiamo ora come costruire una approssimazione numerica per ottenere la legge oraria. Consideriamo il caso in cui non vi siano punti di inversione oppure che ve ne sia solo uno  $V(x_a) = E$  con  $V'(x_a) < 0$ . In questo caso dato  $x_0 > x_a$  se  $p_0 > 0$  non si ha inversione, mentre se  $p_0 < 0$  il moto si inverte. La legge oraria, espressa in forma implicita da  $t = \tau(x_0, x)$ , si approssima valutando l'integrale con un metodo di quadratura. Supponendo che  $p_0 > 0$  le funzioni  $x = x(t)$  e  $t = t(x)$  sono monotone. Il punto  $x_k = x_0 + k\Delta x$  è raggiunto all'istante  $t_k = \tau(x_0, x_k)$  viene approssimato da  $\hat{t}_k$  che soddisfa la la ricorrenza

$$\hat{t}_k = \hat{t}_{k-1} + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{1}{v(x_{k-1})} + \frac{1}{v(x_k)} \right) \quad v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

ottenuta valutando  $\tau(x_{k-1}, x_k)$  con la formula dei trapezi. L'errore tra  $t_k - \hat{t}_k$  è di ordine  $k(\Delta x)^3$ . Usando la formula di Simpson l'errore è di ordine  $k(\Delta x)^5$ .

### Un punto di inversione

Se  $x_0 > x_a$  ma  $p_0 < 0$  il punto di inversione si incontra all'istante  $t_a = \tau(x_a, x_0)$ . Il calcolo di  $t = \tau(x, x_0)$  presenta una singolarità integrabile per  $x = x_a$ . Per eliminare la singolarità fattorizziamo in  $E - V(x)$  lo zero corrispondente al punto di inversione ponendo  $V'(x_a) = -mg$

$$E - V(x) = mg(x - x_a)G(x)$$

dove risulta che  $G(x_a) = 1$  ed introduciamo il seguente cambio di variabile.

$$x(s) = x_a + \frac{g}{2}(s - s_a)^2 \quad s_a = \sqrt{\frac{2(x_0 - x_a)}{g}}$$

Questa forma è suggerita dalla soluzione per un potenziale lineare corrispondente a  $G = 1$  allorché  $x(s)$  è la soluzione esatta con  $s = t$  dove  $t$  è il tempo. Nel caso generale possiamo rappresentare ancora con  $x = x(s)$  la soluzione esatta, dove la legge oraria  $s = s(t)$  deve essere determinata. A tal fine parametrizziamo l'orbita nello spazio delle fasi con  $p = p(s)$ , che viene determinato imponendo che  $H(x(s), p(s)) = E$ . Il risultato è

$$\frac{p(s)}{m} = \left( \frac{2}{m}(E - V) \right)^{1/2} = g(s - s_a) \sqrt{G(x(s))}$$

La radice va presa con la determinazione positiva e quindi  $p$  è negativo per  $s < s_a$ , positivo per  $s > s_a$ . Per ottenere la legge oraria notiamo che

$$\frac{dx}{dt} = g(s - s_a) \frac{ds}{dt} = \frac{p}{m} \quad \longrightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{G(x(s))}$$

ed integrando per parti

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{G(x(s))}}$$

essendo  $G > 0$  l'integrando non è mai singolare e la funzione  $t = t(s)$  è monotona e può essere invertita fornendo  $s = s(t)$ . Usando la formula dei trapezi con un passo di integrazione  $\Delta s = s_a/N$  e detto  $s_k = k \Delta s$  abbiamo la ricorrenza

$$\hat{t}_k = \hat{t}_{k-1} + \frac{\Delta s}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{G(x(s_{k-1}))}} + \frac{1}{\sqrt{G(x(s_k))}} \right) \quad \hat{t}_0 = 0$$

il tempo di inversione  $t_a = t(s_a)$  è approssimato da  $\hat{t}_N$ . L'errore rispetto alla successione esatta  $t_k = t(s_k)$  è data da

$$t_k - t_{k-1} = \hat{t}_k - \hat{t}_{k-1} + O(1/N^3) \quad t_k = \hat{t}_k + O(k/N^3)$$

Il metodo di Simpson consente di avere un errore su  $t_k$  di ordine  $k/N^5$

### Due punti di inversione

Quando vi sono due punti di inversione  $x_a, x_b$  l'orbita è chiusa e l'integrando che compare nel calcolo del tempo di percorrenza  $t = t(x)$  presenta in ciascuno di questi una singolarità integrabile. Inoltre  $t(x)$  è una funzione a più valori. Per eliminare le singolarità si introduce una parametrizzazione della curva chiusa  $x = x(\phi)$ ,  $p = p(\phi)$  che mette in corrispondenza i punti di questa con i punti di un cerchio unitario che sono individuati dall'angolo  $\phi$ . In questo modo  $t$  è una funzione monotona crescente di  $\phi$  e come tale invertibile con inverso unico. Come primo passo fattorizziamo in  $E - V(x)$  i due zeri corrispondenti ai punti di inversione

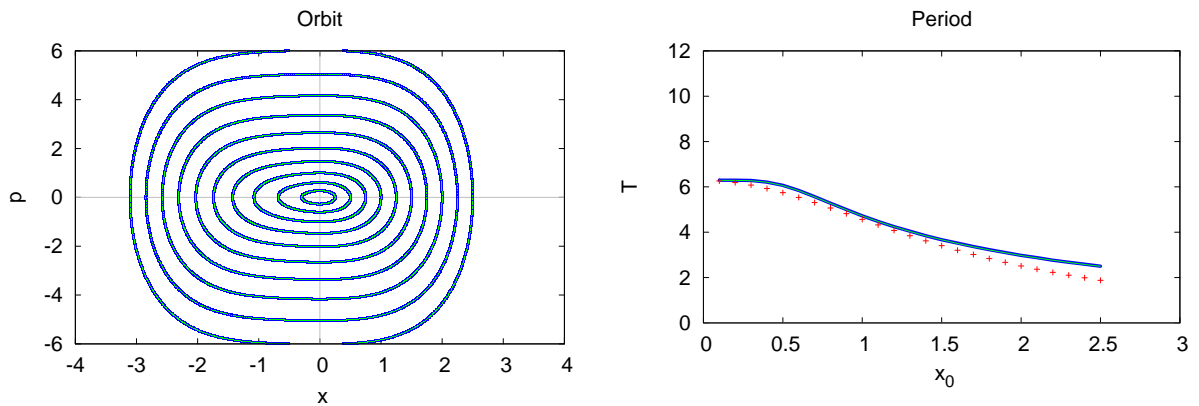
$$\frac{p^2}{m^2} = \frac{2}{m}(E - V(x)) = (x - x_a)(x_b - x)f(x)$$

dove  $f(x) > 0$ . Il rapporto tra  $2(E - V(x))/m$  e  $(x - x_a)(x - x_b)$  definisce una funzione  $f(x)$  positiva in  $[x_a, x_b]$  che nei punti di inversione vale  $f(x_a) = -2V'(x_a)/(m(x_b - x_a))$  e  $f(x_b) = 2V'(x_b)/(m(x_b - x_a))$ . Dal resto di Taylor si ricava anche che  $(f(x_a) + f(x_b))/2 = V''(\xi)$  dove  $\xi$  è un punto interno a  $[x_a, x_b]$ . Quindi nel limite  $E = V(x_c)$  in cui  $x_a = x_b = x_c$  abbiamo  $V''(x_c) = m f(x_c)$ . La funzione  $1/\sqrt{f(x)}$  risulta essere di classe  $C^2$  se tale è il potenziale. Scegliamo la seguente parametrizzazione

$$x = x_a + (x_b - x_a) \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

suggerita dalla soluzione di potenziale quadratico con  $V''(x) = m\omega^2$  perché  $\phi = \omega t$  fornisce la soluzione esatta. Nel caso generale determineremo la legge oraria  $\phi = \phi(t)$  imponendo che l'orbita sia parametrizzata da  $x = x(\phi)$  e  $p = p(\phi)$  in modo tale che  $H(x(\phi), p(\phi)) = E$ . In tal modo si ottiene

$$v = \frac{p}{m} = (x_b - x_a) \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \sqrt{f(x)}$$



**Figura 7.1** Lato sinistro: orbite di un oscillatore anarmonico  $H = p^2/2 + x^2/2 + x^4/4$ . In blu le orbite ottenute tramite la ricorrenza qui descritta per valutare la legge oraria, con  $\Delta\phi = 2\pi/1000$ . In verde orbite

ottenute con integratore simplettico di ordine 2 con  $\Delta t=2\pi/1000$ . Lato destro: in blu da il periodo delle orbite con condizione iniziale  $x_0, p_0=0$  al variare di  $x_0$ , in verde il periodo ottenuto con l'integratore simplettico Crocette rosse il risultato di un calcolo perturbativo che fornisce  $t=2\pi/\Omega$  dove  $\Omega=1+3(x_0^2+p_0^2)/8$ .

Da  $dx/dt = v$  segue che  $d\phi/dt = \sqrt{f(x(\phi))}$  che integrato per parti fornisce

$$t(\phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{f(x(\phi'))}}$$

La valutazione numerica è data dall'a ricorrenza per  $\hat{t}_k$  che approssima  $t_k = t(s_k)$  con un passo  $\Delta\phi = (2\pi)/N$

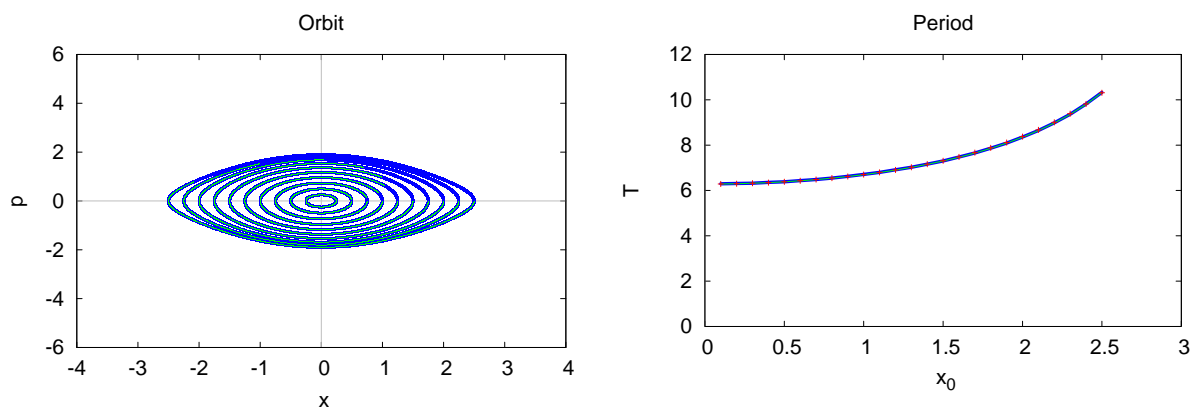
$$\hat{t}_k = \hat{t}_{k-1} + \frac{\Delta\phi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{f(x(\phi_{k-1}))}} + \frac{1}{\sqrt{f(x(\phi_k))}} \right) \quad \hat{t}_0 = 0$$

L'errore  $t(\phi_k) - \hat{t}_k = O(k/N^3)$  diventa di ordine  $k/N^5$  con il metodo di Simpson.

Nel caso generale il potenziale quadratico è  $V(x) = m\omega^2 (x^2/2 - \alpha x)$  ed il suo minimo è  $x = \alpha$ . Posto ancora  $E = m\omega^2 A^2/2$  i punti di inversione sono  $x_a = \alpha - \sqrt{A^2 + \alpha^2}$  e  $x_b = \alpha + \sqrt{A^2 + \alpha^2}$ . La soluzione corrispondente a condizioni iniziali  $x_0 = x_a$  e  $p_0 = 0$  coincide con la parametrizzazione proposta poiché si ha

$$x = \alpha + (x_a - \alpha) \cos \phi = \frac{x_a + x_b}{2} + \frac{x_a - x_b}{2} \cos \phi = x_a + \frac{x_b - x_a}{2} (1 - \cos \phi)$$

$$\frac{p}{m} = -(x_a - \alpha) \sin \phi = \frac{x_b - x_a}{2} \sin \phi$$



**Figure 7.2** Lato sinistro: orbite di un pendolo il cui Hamiltoniano è  $H=p^2/2+1-\cos x$ . Le curve blu e verde corrispondono a quanto indicato nella figura 1. Lato destro: periodo delle orbite al variare della condizione, le curve blu e verdi corrispondono a quanto indicato nella figura 1, il risultato perturbativo, crocette rosse è dato da  $t=2\pi/\Omega$   $\Omega=1-(x_0^2+p_0^2)/16$ .

Concludendo sia nel caso di un solo punto di inversione e quindi di orbita aperta, sia nel caso di due punti di inversione e quindi di orbita chiusa abbiamo parametrizzato l'orbita

esattamente determinando la legge oraria, ossia la dipendenza del parametro dal tempo mediante una quadratura. La legge oraria è lineare nel caso di un sol punto di inversione per un potenziale lineare e nel caso di due punti di inversione per un potenziale quadratico.

Nella figura 1 confrontiamo le orbite di un oscillatore anarmonico ottenute tramite la ricorrenza con le orbite ottenute tramite un integratore симпlettico, descritto nel paragrafo 10. Si confronta anche il periodo  $T$  ottenuto tramite la ricorrenza, l'integratore симпlettico (valutato come due volte l'intervallo tra due cambiamenti di segno del momento) ed il metodo perturbativo descritto nel paragrafo 9. Nella figura 2 si fa lo stesso confronto per il pendolo.

### *Moto su una varietà stabile*

Resta da considerare il caso in cui si abbia un punto di inversione critico, che corrisponde ad un massimo del potenziale. Assumendo quindi che sia  $E = V(x_c)$  dove  $V'(x_c) = 0$  e  $V''(x_c) < 0$  scegliamo condizioni iniziali  $x_0 < x_c$  e  $p_0 > 0$  per cui il moto avviene sulla varietà stabile.

$$\frac{p^2}{m^2} = \frac{2}{m}(E - V(x)) = (x - x_c)^2 f(x)$$

dove  $f(x_c) = -V''(x_c)/m$ . Scegliamo la seguente parametrizzazione per la coordinata  $x = x(\phi)$  da cui segue quella per il momento  $p = p(\phi)$  per la relazione scritta sopra

$$x = x_c + (x_0 - x_c)e^{-\phi} \quad p = (x_c - x_0)e^{-\phi} \sqrt{f(x)}$$

Derivando  $x$  rispetto a  $t$  e confrontando con  $p/m$  troviamo

$$\frac{dx}{dt} = (x_c - x_0)e^{-\phi} \frac{d\phi}{dt} \quad \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{f(x)}$$

La legge oraria si ottiene invertendo  $t = t(\phi)$  e scelto un passo  $\Delta\phi = 2\pi/N$  si approssima  $t_k = t(k\Delta\phi)$  con  $\hat{t}_k$  definito dalla stessa ricorrenza scritta nel caso precedente ed ottenuta integrando tramite il metodo dei trapezi.

## **Esempi**

Diamo qui alcuni esempi di sistemi il cui spazio delle fasi è bidimensionale forniti sia dalla meccanica sia dalla biologia

### *Fluido bidimensionale incompressibile inviscido*

Dette  $v_x, v_y$  le componenti del campo di velocità che supponiamo stazionario la equazione per le linee di corrente è data da

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y)$$

Siccome il campo ha divergenza nulla la forma differenziale  $dH = -v_y dx + v_x dy$  è esatta e l'integrale primo  $H(x, y)$  si calcola integrandola lungo il cammino più semplice, ad esempio se l'origine è un punto non singolare

$$H(x, y) = - \int_0^x v_y(x', 0) dx' + \int_0^y v_x(x, y') dy'$$

Le curve  $H(x, y) = E$  sono le linee di corrente e la legge oraria si ricava con il procedimento precedentemente descritto.

### *Forza dissipativa lineare*

Consideriamo un punto di massa unitaria soggetto ad una forza dissipativa lineare data da  $F = -\beta p$ .

$$\frac{dx}{dt} = p \quad \frac{dp}{dt} = -\beta p$$

In questo caso esiste un integrale primo  $H$  che non è l'energia. Da  $dH = c(\beta p dx + p dp)$  con la scelta  $c = 1/p$  la forma differenziale è esatta e l'integrale primo è dato da

$$H = p + \beta x$$

Siccome  $c = 1/p$  si annulla sull'asse  $x$  si vede che  $H$  è definito separatamente nel semipiano superiore e su quello inferiore dove si hanno traiettorie distinte. Per una data condizione iniziale è  $(x_0, p_0)$  la legge oraria si ricava integrando  $\dot{x} = p = p_0 - \beta(x - x_0)$  ed è

$$x = x_0 + \frac{p_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

### *Equazione di Lotka volterra*

Questa è la equazione che governa due specie in un ecosistema, le prede erbivore  $P$  che hanno risorse alimentari illimitate ed i predatori carnivori  $C$  che hanno i primi come fonte di alimentazione. La equazione di evoluzione si scrive

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \mu PC \quad \frac{dC}{dt} = -\beta C + \nu PC$$

moltiplicando la prima per  $\nu$  e la seconda per  $\mu$  possiamo riscrivere i  $x = \nu P$  e  $y = \mu C$  ottenendo

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - xy \quad \frac{dy}{dt} = -\beta y + xy$$

Notiamo che la condizione di separabilità è soddisfatta ed il fattore integrante è dato da  $c(x, y) = 1/(xy)$ . L'integrale primo è dato da

$$H = \beta \log x + \alpha \log y - x - y$$

I punti critici del campo  $(x_c, y_c)$  sono  $(0, 0)$  e  $(\beta, \alpha)$ . Notiamo però che essendo  $c(x, y)$  singolare sugli assi si ha un integrale primo definito separatamente in ciascun quadrante e scelta la condizione iniziale in un quadrante, l'orbita vi rimane. Il primo quadrante è quello significativo dal punto di vista biologico. Nel punto critico  $(\beta, \alpha)$  la funzione  $H$  ha un massimo e per ogni valore di  $H = E$  inferiore al massimo si ha un'orbita chiusa. Una soluzione esplicita  $y = y(x, E)$  non si trova analiticamente. In prossimità del punto critico

possiamo linearizzare le equazioni del moto. Sviluppando il campo attorno al punto critico e tenendo solo il primo ordine si ottiene

$$\frac{dx}{dt} = -\beta(y - \alpha) \quad \frac{dy}{dt} = \alpha(x - \beta)$$

La soluzione è periodica con frequenza  $\omega = \sqrt{\alpha\beta}$  e le orbite sono ellissi .

### *Casi singolari*

Quando il fattore integrante ha una singolarità la forma differenziale  $dH$  può essere chiusa ma non esatta ed in tal caso  $H$  risulta a più valori. Un caso tipico è dato dal campo  $\Phi_x = -\lambda x + \omega y$ ,  $\Phi_y = -\lambda y - \omega x$  dove scelto  $c = (x^2 + y^2)^{-1}$  come fattore integrante si trova che  $dH = -c\Phi_y dx + c\Phi_x dy$  è una forma chiusa ma non esatta. Infatti  $c(x, y)$  risulta singolare nell'origine e l'integrale di  $dH$  lungo una qualsiasi curva chiusa che contiene l'origine non si annulla ma vale  $-2\pi\lambda$ . L'integrale primo è  $H = \frac{\omega}{2} \log(x^2 + y^2) - \lambda\varphi(x, y)$  dove  $\varphi(x, y)$  è la fase del punto di coordinate  $(x, y)$ . Infatti in coordinate polari  $(x^2 + y^2)^{-2}(y dx - x dy) = -d\phi$  e quindi  $\varphi(x, y) = \phi$ . La soluzione coordinate polari è espressa da  $r = r_0 e^{-\lambda t}$ ,  $\phi = -\omega t$  e  $H = \omega \log r - \lambda\phi$  risulta essere un integrale primo. Tuttavia la variazione di  $H$  quando si percorre  $n$  volte un un cerchio nel verso antiorario non è nulla ma vale  $-2\pi n \lambda$ .

### *Cicli limite e attrattori*

La ricerca di un integrale primo per sistemi in cui è presente una forza di tipo dissipativo conduce a funzioni a più valori. In questo caso la soluzione per  $t \rightarrow +\infty$  converge ad un punto di equilibrio stabile ed attrattivo. Se cambiamo il segno della forza, l'energia del sistema anziché essere dissipata cresce, e la soluzione diverge per  $t \rightarrow +\infty$ . Se la forza è dissipativa in un regione dello spazio delle fasi, mentre fa aumentare l'energia in un'altra, sotto opportune condizioni l'orbita asintoticamente può convergere ad una curva chiusa che viene detta ciclo limite. Esempi di cicli limite sono stati dati nel secondo capitolo ove si è anche mostrato come un ciclo limite possa nascere attraverso una biforcazione di Hopf. Un esempio classico è quello della equazione di Van del Pol che governa un particolare circuito elettrico

$$\frac{dx}{dt} = p \quad \frac{dp}{dt} = -x + \mu p(1 - x^2)$$

Il ciclo limite è attrattore come lo è un punto critico asintoticamente stabile solo che ha dimensione 1 anziché 0. I sistemi lineari possono avere solo punti critici come attrattori. Tuttavia se si introduce un termine non omogeneo con dipendenza periodica dal tempo è possibile avere un attrattore. L'esempio classico è quello di un sistema meccanico con una forza lineare attrattiva, una forza dissipativa ed una forzante periodica. La equazione posto per semplicità  $m = 1$  diventa

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \quad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 x - \beta p + F_0 \cos(\Omega t)$$

e la soluzione asintotica diventa

$$x = A \cos(\Omega t + \alpha) \quad p = -\Omega \sin(\Omega t + \alpha)$$

dove

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2) + \beta^2 \Omega^2}} \quad \tan \alpha = \frac{\beta \Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Qui si manifesta il fenomeno di risonanza ossia l'ampiezza  $A$  delle oscillazioni ha un massimo per  $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2/2}$ .

## Equazioni di Lagrange

Prima di considerare sistemi di equazioni di dimensionalità più elevata è opportuno un richiamo sulle equazioni di Lagrange e di Hamilton che vengono derivate per i sistemi meccanici ma hanno un ambito di applicazione più ampio. In particolare queste equazioni valgono per sistemi meccanici con vincoli o in coordinate curvilinee. Cominciamo considerando un punto materiale e scriviamo la sua equazione del moto nella forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\text{vinc}}$$

dove  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  è la forza di origine fisica, mentre  $\mathbf{F}^{\text{vinc}}$  è la forza vincolare che dobbiamo introdurre, se il sistema è vincolato su una superficie o su una curva, per rendere la traiettoria compatibile con i vincoli. Se questi non dipendono dal tempo si può provare che  $\mathbf{F}^{\text{vinc}}$  deve essere o normale alla superficie o appartenere al piano normale alla curva per compensare esattamente la forza applicata che tenderebbe ad allontanare il punto dalla varietà su cui è vincolato a muoversi. In generale dunque  $\mathbf{F}^{\text{vinc}}$  appartiene allo spazio normale alla varietà mentre la velocità  $\mathbf{v}$  appartiene allo spazio tangente. Per scrivere le equazioni del moto dobbiamo parametrizzare la varietà con coordinate indipendenti  $q_i$ . Nel caso di una superficie si hanno 2 coordinate indipendenti, nel caso di una curva una sola. Per una superficie la condizione di vincolo è

$$f(\mathbf{r}) = 0$$

e con  $\mathbf{r}(q_1, q_2)$  indichiamo una sua parametrizzazione. I vettori  $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$  sono tangenti alla superficie e linearmente indipendenti, poichè si assume la applicazione  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2)$  sia invertibile. Una curva è parametrizzata da  $\mathbf{r}(q)$  e risulta che  $\partial \mathbf{r} / \partial q$  è tangente alla curva. Nel caso di un punto non vincolato possiamo introdurre coordinate curvilinee tramite  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$  e i vettori  $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$  sono linearmente indipendenti se la trasformazione è invertibile. Se proiettiamo le equazioni sul piano tangente moltiplicandole scalarmente per  $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$  otteniamo

$$m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = Q_i \quad Q_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F}$$

dove  $Q_i$  prendono il nome di forze generalizzate di Lagrange. Notiamo che la velocità è espressa da

$$\mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$



dove  $\dot{q}_i = dq_i/dt$  sono le velocità generalizzate ossia le componenti di  $\mathbf{v}$  sulla base nello spazio tangente. Se consideriamo  $\dot{q}_i$  come variabili indipendenti da  $q_i$  possiamo scrivere

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - m \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \end{aligned}$$

dove  $T = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2$  è la energia cinetica che risulta essere una forma quadratica nella  $\dot{q}_i$  con coefficienti che dipendono da  $q_i$ . Le equazioni di Lagrange sono date da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Queste sono equazioni differenziali del secondo ordine che vanno risolte imponendo le condizioni iniziali per  $q_i$  e  $\dot{q}_i$  al tempo  $t = 0$ . Nel caso di una curva parametrizzata da  $\mathbf{r}(q)$  si ha una sola equazione con  $i = 1$ , nel caso di una superficie le equazioni sono due, in assenza di vincoli le equazioni sono tre ma sempre comunque indipendenti, perché tali sono le coordinate lagrangiane

Se le forze sono conservative ossia se  $\mathbf{F} = -\text{grad } V$  si trova che  $Q_i = -\partial V/\partial q_i$ . Più in generale si dice che forze ammettono un potenziale generalizzato se esiste una funzione  $V$  di  $q_i$  e  $\dot{q}_i$  tale che

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Il potenziale generalizzato deve dipendere linearmente dalle velocità generalizzate affinché le  $Q_i$  dipendano solo dalla velocità e non dalla accelerazione. Inoltre condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale generalizzato  $V$  non dipendente da  $t$  esplicitamente, è che la potenza delle forze sia nulla  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \sum_i Q_i \dot{q}_i = 0$ . Esempi significativi sono la forza di Lorenz e quella di Coriolis. In questo caso le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \mathcal{L} = T - V$$

Se accanto alle forze che ammettono un potenziale generalizzato vi sono forze dissipative del tipo  $\mathbf{F}_D = -m\beta\mathbf{v}$  allora le corrispondenti forze generalizzate sono

$$Q_{Di} = -m\beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{v} = -m\beta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathbf{v} = -\beta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

e le equazioni di Lagrange diventano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\beta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Introduciamo i momenti coniugati  $p_i$  e consideriamo le equazioni del moto supponendo che tutte le forze ammettano un potenziale generalizzato

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Ne segue che se una coordinata  $q_i$  è ignorata ossia non compare nella lagrangiana, il corrispondente momento coniugato  $p_i$  risulta essere conservato ed è quindi un integrale primo del moto. In questo caso se  $q_i$  è ignorata la Lagrangiana è invariante per traslazione rispetto a questa coordinata ed a questa simmetria corrisponde l'integrale primo del moto  $p_i$ . Tale risultato si generalizza tramite il teorema di Nöther secondo cui ad ogni gruppo continuo ad un parametro con generatore infinitesimo  $\psi_i$  ossia tale  $dq_i/d\alpha = \psi_i(\mathbf{q})$  corrisponde un integrale primo  $I = \sum_i p_i \psi_i(\mathbf{q})$ .

La derivata rispetto al tempo della lagrangiana è data da

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_i (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Si introduce quindi la funzione  $H$  definita da

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

e da  $dH/dt = -\partial \mathcal{L}/\partial t$  segue che se  $\mathcal{L}$  non dipende dal tempo  $H$  è un integrale primo, che corrisponde alla energia meccanica.

## Equazioni di Hamilton

Siccome la energia cinetica è una forma quadratica nella  $\dot{q}_i$  si definisce la Hamiltoniana tramite la trasformata di Legendre

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \max_{\dot{\mathbf{q}}} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right)$$

dove il massimo è raggiunto per  $p_i = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ . Per esprimere la lagrangiana in funzione dei momenti basta osservare che essendo  $T$  una forma quadratica nelle velocità generalizzate i momenti risultano una funzione lineare di queste e quindi di possano riesprimere le velocità generalizzate in funzione dei momenti. Se le forze sono conservative il potenziale dipende solo dalle coordinate e

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} \mathbb{T}_{jk}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k \mathbb{T}_{ik}(\mathbf{q}) \dot{q}_k$$

In questo caso si trova che

$$H = 2T - \mathcal{L} = T + V = \frac{1}{2} \sum_{jk} \mathbb{T}_{jk}^{-1}(\mathbf{q}) p_j p_k + V(\mathbf{q})$$

Per ottenere le equazioni del moto calcoliamo il differenziale di  $H$

$$dH = \sum_i \left( \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

dove abbiamo tenuto conto della definizione dei momenti coniugati e delle equazioni di Lagrange. Si ha quindi che

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

che costituiscono un sistema di  $2d$  equazioni del primo ordine se  $d$  è il numero di gradi di libertà ossia il numero di coordinate generalizzate del problema. Si ha inoltre che la derivate parziali di  $\mathcal{L}$  e di  $H$  rispetto a  $t$  sono uguali e di segno contrario. Vale quindi il risultato

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

### Principio variazionale

Le equazioni di Lagrange possono essere ottenute da un principio variazionale. A tal fine si introduce l'azione  $A$

$$A(\mathbf{q}) = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt$$

definita su tutte le traiettorie  $\mathbf{q}(t)$  che agli estremi dell'intervallo temporale hanno un valore assegnato

$$\mathbf{q}(t_a) = \mathbf{q}_a \quad \mathbf{q}(t_b) = \mathbf{q}_b$$

Tra tutte le possibili traiettorie almeno una soddisfa le equazioni del moto. Si dimostra che se  $\mathbf{q}(t)$  è questa traiettoria e  $\mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t)$  è una traiettoria variata dove la variazione è nulla agli estremi  $\mathbf{h}(t_a) = \mathbf{h}(t_b) = 0$  allora la variazione di  $A$  al primo ordine in  $\mathbf{h}$  è nulla. Questo risultato si esprime anche dicendo che l'azione risulta stazionaria sulla traiettoria fisica. Per provarlo osserviamo che

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q} + \mathbf{h}) - A(\mathbf{q}) &= \int_{t_a}^{t_b} \left( \mathcal{L}(\mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t), t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right) dt = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i \right) dt + O(\|\mathbf{h}\|^2) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i h_i \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) h_i dt + O(\|\mathbf{h}\|^2) \end{aligned}$$

dove si è fatta fatto una integrazione per parti. Nell'ultima riga il primo termine si annulla perche la variazione  $\mathbf{h}$  è nulla agli estremi, il secondo è lineare in  $\mathbf{h}$  si annulla se  $\mathbf{q}(t)$  soddisfa le equazioni di Lagrange. Viceversa se l'integrale si annulla qualunque sia la variazione  $\mathbf{h}(t)$  allora riscrivendo l'integrale nella forma  $\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{h}(t) dt = 0$  ne consegue che  $\mathbf{f}(t) = 0$  sotto la sola ipotesi che sia  $\mathbf{h}(t)$  e  $\mathbf{f}(t)$  siano continue in  $t$  e quindi  $\mathbf{q}(t)$  soddisfa le equazioni di Lagrange. Il risultato è intuitivo se pensiamo all'integrale come un prodotto scalare tra due vettori in uno spazio infinito dimensionale. Se il prodotto scalare tra due vettori si annulla qualunque sia la scelta del secondo vettore, il primo vettore deve essere necessariamente nullo. Come esempio particolare consideriamo il caso in cui la lagrangiana sia  $\mathcal{L} = \dot{q}^2/2 - V(q)$

$$\begin{aligned} A(q+h) - A(q) &= \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{(\dot{q} + \dot{h})^2}{2} - \frac{\dot{q}^2}{2} - V(q+h) + V(q) \right) dt = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} (\dot{q}\dot{h} - hV'(q)) dt + \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{\dot{h}^2}{2} - \frac{h^2}{2} V''(q + \lambda h) \right) dt \end{aligned}$$

dove  $0 < \lambda < 1$ . Integrando per parti il primo integrale si annulla sulla traiettoria fisica che soddisfa  $\ddot{q} + V'(q) = 0$ , mentre il resto di ordine  $h^2$  risulta positivo se il potenziale soddisfa la condizione  $V''(x) < 0$ . In tal caso l'azione ha un minimo sulla traiettoria fisica, che soddisfa le equazioni del moto.

Il principio variazionale si estende considerando l'azione definita sulle traiettorie  $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$  nello spazio delle fasi dove  $\mathbf{q}(t)$  ha un valore assegnato in  $t_a$  e  $t_b$

$$A = \int_{t_a}^{t_b} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) dt$$

Si prova  $A$  risulta stazionaria su una traiettoria  $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$  se e solo se questa soddisfa le equazioni del moto di Hamilton. Questo significa che detta  $\mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \mathbf{p}(t) + \boldsymbol{\kappa}(t)$  una traiettoria variata qualsiasi con  $\mathbf{h}(t)$  nulla in  $t_a, t_b$ , la variazione di  $A$  si annulla al primo ordine in  $\mathbf{h}(t)$  e  $\boldsymbol{\kappa}(t)$ .

## Esempi

Consideriamo alcuni modelli tipici della meccanica per illustrare l'utilizzo della formulazione lagrangiana ed hamiltoniana.

### Pendolo

È costituito da un punto di massa  $m$  vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio  $R$  in un piano verticale  $x, y$ . Come coordinata lagrangiana scegliamo l'angolo  $\phi$  misurato rispetto al punto  $(0, -R)$  di minima altezza considerando positivo il verso antiorario ossia

$$x = R \sin \theta \quad y = -R \cos \theta$$

La energia cinetica e quella potenziale, scelta nulla nel punto di minima altezza, sono date da

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 \quad V = mg(R + y) = mgR(1 - \cos \theta)$$

La lagrangiana scalata  $\mathcal{L} = (T - V)/(mR^2)$  è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - 2\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

L'equazione di Lagrange è

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

In questo caso  $p = \dot{\phi}$  e la hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2} + 2\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

I punti critici sono  $\theta = 0, \pi$  di cui il primo stabile, il secondo instabile. Data la periodicità in  $\theta$  si hanno infiniti punti critici aggiungendo un multiplo intero di  $2\pi$ . Vicino al punto stabile è lecita l'approssimazione quadratica di  $V$  detta anche di piccole oscillazioni per cui

$$H_{p.o.} = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{\theta^2}{2}$$

In questo caso è un moto armonico di frequenza  $\omega$  e le orbite nel piano delle fasi sono ellissi.

*Punto su una parabola che ruota*

Se abbiamo una parabola  $y = x^2/(2R)$  che ruota con velocità angolare rispetto all'asse  $x$  nel sistema rotante agisce la forza centrifuga oltre alla forza peso e scelta  $x$  come variabile indipendente la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right) - \frac{mg}{2R} x^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2$$

e detto  $p = m\dot{x}(1 + x^2/R^2)^{-1}$  la hamiltoniana si scrive

$$H = \frac{p^2}{2m} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-1} + \frac{m}{2} \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) x^2$$

Il punto critico  $x = 0$  è stabile se  $g > R\omega^2$ , altrimenti è instabile.

*Campo centrale*

Il potenziale di un campo centrale dipende solo dalla distanza dalla origine. Il momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  si conserva ed il moto avviene in un piano. Scegliamo in questo piano coordinate polari  $x = r \cos \phi$  e  $y = r \sin \phi$ . La lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

I momenti coniugati sono  $p_r = m\dot{r}$  e  $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ . Il secondo è conservato e l'hamiltoniana si scrive

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r)$$

Il problema diventa unidimensionale e si integra per separazione di variabili partendo da

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r)$$

I punti critici del potenziale efficace  $V_{\text{eff}}(r)$  corrispondono ad orbite circolari su cui  $\dot{\phi}$  è costante e quindi il moto è circolare uniforme. Se  $V_{\text{eff}}$  ha un minimo la corrispondente orbita circolare è stabile.

### *Moto in un sistema rotante*

Consideriamo un sistema fisso ed un sistema rotante ed indichiamo con  $(x_F, y_F)$  e  $(x, y)$  le coordinate del vettore posizione  $\mathbf{r}$  nei due sistemi e con  $\mathbf{e}_{x_F}, \mathbf{e}_{y_F}$  i versori degli assi del sistema fisso e con  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  i versori degli assi del sistema rotante

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_{x_F} x_F + \mathbf{e}_{y_F} y_F = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$$

Indichiamo poi con  $\phi > 0$  l'angolo di rotazione. Se la rotazione è nel verso orario le componenti del vettore  $\mathbf{e}_x$  sulla base del sistema fisso sono  $(\cos \phi, -\sin \phi)$  mentre le componenti di  $\mathbf{e}_y$  sono  $(\sin \phi, \cos \phi)$ . La trasformazione tra le coordinate dei due sistemi è data dalla matrice di rotazione  $R(\phi)$

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = R(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Se quindi il sistema ruota con velocità angolare  $\omega$  costante ma nel verso antiorario si ha  $\phi = -\omega t$  e la trasformazione tra le coordinate e le velocità diventa

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{y}_F \end{pmatrix} = R(-\omega t) \left( \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + R(\omega t) \dot{R}(-\omega t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = R(-\omega t) \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \end{pmatrix}$$

dove  $\dot{R}(-\omega t) = -\omega dR(\phi)/d\phi$  con  $\phi = -\omega t$  e quindi si ha

$$R(\omega t) \dot{R}(-\omega t) = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  trasforma le componenti  $(x, y)$  del vettore  $\mathbf{r}$  in  $(-y, x)$  che sono quelle del vettore  $\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ . Indicando con  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$  il vettore velocità angolare, con  $\mathbf{v}_F = \mathbf{e}_{x_F} \dot{x}_F + \mathbf{e}_{y_F} \dot{y}_F$  la velocità nel sistema fisso e con  $\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y$  la trasformazione tra le velocità si scrive

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

La lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \left( V - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right)$$

La forma è la stessa qualunque sia la direzione del vettore  $\boldsymbol{\omega}$ . I termini tra parentesi sono il potenziale della forza, il potenziale della forza centrifuga ed il potenziale generalizzato della forza di Coriolis per la lagrangiana riferita al sistema ruotante. In forma esplicita si ha

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2) - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y) + \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$$

I momenti coniugati sono

$$p_x = m(\dot{x} - \omega y) \quad p_y = m(\dot{y} + \omega x)$$

e la Hamiltoniana diventa

$$\begin{aligned} H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \mathcal{L} &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V - \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \\ &= \frac{m}{2} \left( \left( \frac{p_x}{m} + \omega y \right)^2 + \left( \frac{p_y}{m} - \omega x \right)^2 \right) + V(x, y) = \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \omega(y p_x - x p_y) + V(x, y) \end{aligned}$$

La lagrangiana scritta invece nelle coordinate del sistema fisso è data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_F^2 + \dot{y}_F^2) - V_F(x_F, y_F, t)$$

dove  $V_F$  è il potenziale riscritto nelle coordinate del sistema fisso. In questo caso  $p_{x_F} = m\dot{x}_F$  e  $p_{y_F} = m\dot{y}_F$  per cui la trasformazione tra i momenti diventa una semplice rotazione, come per le coordinate.

$$\begin{pmatrix} p_{x_F} \\ p_{y_F} \end{pmatrix} = mR(-\omega t) \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \end{pmatrix} = R(-\omega t) \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

### *Il problema dei 3 corpi*

Una applicazione si ha nel problema dei tre corpi ristretto planare, in cui il sole e Giove descrivono orbite circolari. Il moto di un terzo corpo di massa molto piccola tale da

non influenzare il moto del sole e di Giove si può studiare nel sistema corotante. In questo sistema, scelta l'origine nel centro di massa, le coordinate del sole e di Giove sono  $(-Rm_2/(m_1 + m_2), 0)$  e  $(Rm_1/(m_1 + m_2), 0)$  se  $m_1$  ed  $m_2$  sono le rispettive masse e  $R$  la loro distanza. Nel sistema fisso (inerziale) il potenziale gravitazionale viene a dipendere da tempo a causa della rotazione del sole e di Giove. Nel sistema corotante l'hamiltoniano è un integrale primo del moto, tuttavia il problema non è integrabile perché non esiste un secondo integrale primo del moto. Si determinano analiticamente soltanto le posizioni di equilibrio. I punti di equilibrio Lagrangiani  $L_3, L_4$  si hanno quando il terzo corpo è nel vertice di un triangolo equilatero, con Giove ed il sole negli altri due vertici. Questi punti sono linearmente stabili, ma la condizione di Lyapunov per la stabilità non lineare non risulta soddisfatta.

### *Pendolo con punto di sospensione oscillante*

Consideriamo un pendolo il cui punto di sospensione oscilla su un asse verticale con una legge assegnata  $\eta = \eta(t)$ . Il punto si muove su un cerchio di centro  $(0, \eta(t))$  e raggio  $R$ . Se  $\theta$  è l'angolo che si annulla nella posizione di minima altezza sul cerchio le coordinate del punto sono

$$x = R \sin \theta \quad y = \eta + R(1 - \cos \theta)$$

La lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2 + 2R\dot{\eta}\dot{\theta} \sin \theta) - mgR\eta - mgR(1 - \cos \theta)$$

La equazione del moto posto  $\omega^2 = g/R$  è data da

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \left(1 + \frac{\ddot{\eta}}{g}\right) \sin \theta = 0$$

Notiamo che il secondo e quarto termine nella lagrangiana non dipendono né da  $\theta$  né da  $\dot{\theta}$  e quindi possono essere ignorati in quanto danno contributo nullo alle equazioni del moto. Essendo  $p_\theta = mR^2\dot{\theta} + mR\dot{\eta}\sin \theta$  si trova che

$$H = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2mR^2}(p_\theta - mR\dot{\eta}\sin \theta)^2 + mgR(1 - \cos \theta)$$

La dipendenza dal tempo non consente di avere più un integrale primo ed il sistema presenta moti caotici. Tuttavia se  $\eta(t)$  oscilla rapidamente il punto di equilibrio instabile  $\theta = \pi$  può diventare stabile. Questo è un modello che permette di capire la stabilizzazione dinamica della instabilità di Rayleigh Taylor che si ha nell'interfaccia tra un fluido più denso ed un fluido meno denso.

### *Campi di velocità di un fluido*

Per un fluido incompressibile inviscido con un vortice puntiforme nell'origine si ha un campo di velocità  $\mathbf{v}(x, y)$  cui corrisponde un integrale primo dato da

$$H = -\frac{k}{2\pi} \log(x^2 + y^2)$$



Le linee di corrente sono circonferenze che le particelle di fluido percorrono con velocità angolare costante ma che aumenta come  $1/r^2$  al diminuire del raggio  $r$ .

Il campo di velocità per un fluido incompressibile inviscido che ha asintoticamente è orizzontale  $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{e}_x$  e che trova un ostacolo costituito da un disco circolare di raggio  $R$  con centro nell'origine, il campo di velocità vale

$$v_x = 1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad v_y = -R^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

In questo caso l'integrale primo ossia la hamiltoniana del sistema è dato da

$$H = y \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$$